

第3讲二次函数

一、二次函数的图象和性质

当 $a > 0, h > 0, k > 0$ 时

函数解析式	$y = ax^2$	$y = ax^2 + k$	$y = a(x - h)^2$	$y = a(x - h)^2 + k$
图象				
对称轴	<u>y轴 ($x = 0$)</u>	<u>y轴 ($x = 0$)</u>	<u>$x = h$</u>	<u>$x = h$</u>
顶点	<u>(0 , 0)</u>	<u>(0 , k)</u>	<u>(h , 0)</u>	<u>(h , k)</u>
最低点	有最 <u>低</u> 点 , 最 <u>低</u> 点为顶点			
函数最小值	<u>$y = 0$</u>	<u>$y = k$</u>	<u>$y = 0$</u>	<u>$y = k$</u>
图象特征	在对称轴左侧 , 抛物线从左到右 <u>下降</u> 在对称轴右侧 , 抛物线从左到右 <u>上升</u>			
函数变化规律	当 $x < 0$ 时 , y 随 x 的增大而 <u>减小</u> 当 $x > 0$ 时 , y 随 x 的增大而 <u>增大</u>		当 $x < h$ 时 , y 随 x 的增大而 <u>减小</u> 当 $x > h$ 时 , y 随 x 的增大而 <u>增大</u>	
$ a $ 决定开口大小	$ a $ 越大 , 开口 <u>越小</u> ; $ a $ 越小 , 开口 <u>越大</u> . 在对称轴右侧 , 沿着逆时针方向 , a 的值逐渐 <u>增大</u> .			

教法备注

当 $a > 0, h > 0, k > 0$ 时

【解析】 $\because -2 < 0$,

$\therefore$ 二次函数开口向下, 故A错误;

对称轴为 $x = 0$, 开口向下,

$\therefore x < 0$ 时, y 随 x 的增大而增大, 故B正确;

顶点坐标为 $(0, 1)$, 故C错误;

$x = 0$ 时, y 的最大值为1, 故D错误.

故选B.

【标注】【知识点】二次函数 $y = a(x-h)^2 + k$ 的图象和性质

3. 关于二次函数 $y = \frac{1}{2}(x+1)^2$ 的图象, 下列说法正确的是().

A. 开口向下

B. 经过原点

C. 对称轴右侧的部分是下降的

D. 顶点坐标是 $(-1, 0)$

【答案】D

【解析】A选项: 由二次函数 $y = \frac{1}{2}(x+1)^2$ 中 $a = \frac{1}{2} > 0$, 则抛物线开口向上; 故本项错误;

B选项: 当 $x = 0$ 时, $y = \frac{1}{2}$, 则抛物线不过原点; 故本项错误;

C选项: 由二次函数 $y = \frac{1}{2}(x+1)^2$ 得, 开口向上, 对称轴为直线 $x = -1$, 对称轴右侧的图象上升; 故本项错误;

D选项: 由二次函数 $y = \frac{1}{2}(x+1)^2$ 得, 顶点为 $(-1, 0)$; 故本项正确;

故选D.

【标注】【知识点】二次函数 $y = a(x-h)^2 + k$ 的图象和性质

4. 对于抛物线 $y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 3$, 下列结论:

①抛物线的开口向下, ②对称轴为直线 $x = 1$, ③顶点坐标为 $(-1, 3)$; ④ $x > 1$ 时, y 随 x 的增大而减小, 其中正确结论的个数为().

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】C

【解析】① $\because a = -\frac{1}{2} < 0$,

$\therefore$ 抛物线的开口向下, 正确;

②对称轴为直线 $x = -1$, 故本小题错误,

③顶点坐标为 $(-1, 3)$ ，正确；

④ $\because x > -1$ 时， y 随 x 的增大而减小，

$\therefore x > 1$ 时， y 随 x 的增大而减小一定正确；

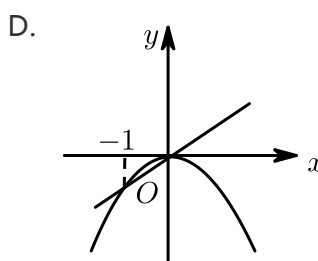
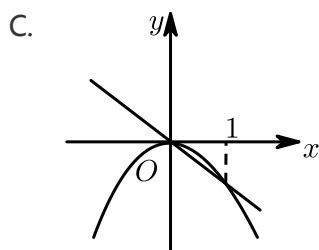
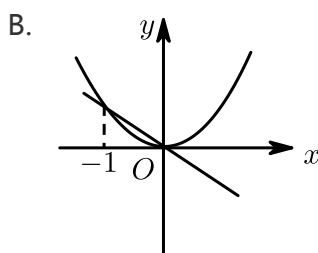
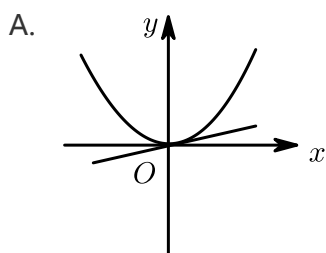
综上所述，结论正确的个数是①③④共3个．

故选C．

【标注】【知识点】二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象和性质

典题精炼2

5. 已知 $a \neq 0$ ，在同一直角坐标系中，函数 $y = ax$ 与 $y = ax^2$ 的图象有可能是（ ）．



【答案】 C

【解析】 A．函数 $y = ax$ 中， $a > 0$ ， $y = ax^2$ 中， $a > 0$ ，但当 $x = 1$ 时，两函数图象有交点 $(1, a)$ ，故A错误；

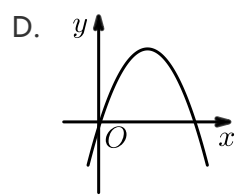
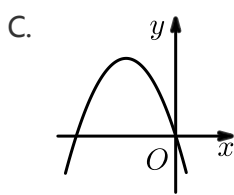
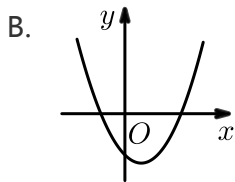
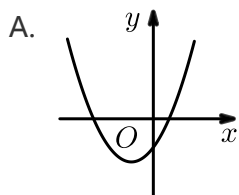
B．函数 $y = ax$ 中， $a < 0$ ， $y = ax^2$ 中， $a > 0$ ，故B错误；

C．函数 $y = ax$ 中， $a < 0$ ， $y = ax^2$ 中， $a < 0$ ，但当 $x = 1$ 时，两函数图象有交点 $(1, a)$ ，故C正确；

D．函数 $y = ax$ 中， $a > 0$ ， $y = ax^2$ 中， $a < 0$ ，故D错误．
故选C．

【标注】【知识点】一次函数与二次函数图象的综合判断

6. 如图，若一次函数 $y = ax + b$ 的图象经过二、三、四象限，则二次函数 $y = ax^2 + bx$ 的图象可能是（ ）．



【答案】C

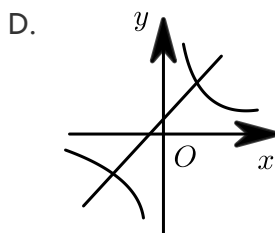
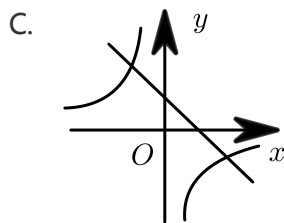
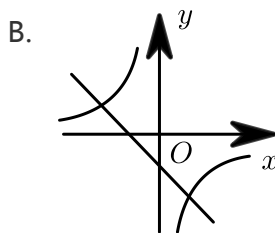
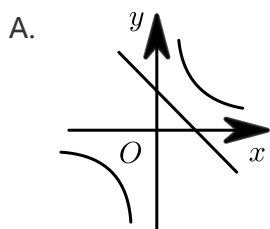
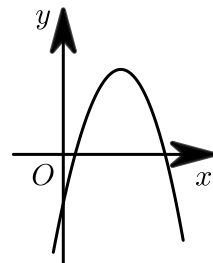
【解析】 $\because a < 0, b < 0, c = 0,$

$\therefore$ 开口向下, $-\frac{b}{2a} < 0$, 对称轴在 y 轴左侧, 必过原点,

故答案为C.

【标注】【知识点】一次函数与二次函数图象的综合判断

7. 已知 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象如图, 则 $y = ax + b$ 和 $y = \frac{c}{x}$ 的图象为 ().



【答案】C

【解析】根据二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象,

可得 $a < 0, b > 0, c < 0,$

$\therefore y = ax + b$ 过一、二、四象限,

双曲线 $y = \frac{c}{x}$ 在二、四象限,

∴C是正确的.

故选：C.

【标注】【知识点】二次函数与反比例函数综合

二、二次函数的解析式

1. 一般式

$y = ax^2 + bx + c$		
a 的符号	$a > 0$	$a < 0$
开口方向	向上	向下
对称轴	$x = \underline{\hspace{2cm}}$	
顶点坐标	$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$.	
函数最值	有最小值 $\frac{4ac - b^2}{4a}$	有最大值 $\frac{4ac - b^2}{4a}$
	当定义域为全体实数时，函数的最小值或最大值是 <u>顶点纵坐标</u> 的值	
增减性	当 $\underline{\hspace{1cm}}$ 时， y 随 x 的增大而 $\underline{\hspace{1cm}}$	当 $\underline{\hspace{1cm}}$ 时， y 随 x 的增大而 $\underline{\hspace{1cm}}$
	当 $\underline{\hspace{1cm}}$ 时， y 随 x 的增大而 $\underline{\hspace{1cm}}$	当 $\underline{\hspace{1cm}}$ 时， y 随 x 的增大而 $\underline{\hspace{1cm}}$
$ a $ 决定开口大小	$ a $ 越大，开口 <u>越小</u> ； $ a $ 越小，开口 <u>越大</u> . 在对称轴右侧，沿着逆时针方向， a 的值逐渐 <u>增大</u> .	

教法备注

任意一个二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 都可以运用配方法，把它的解析式化为 $y = a(x + m)^2 + k$ 的形式：

对二次整式 $ax^2 + bx + c$ 配方，得

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a},$$

$$\text{所以 } y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a},$$

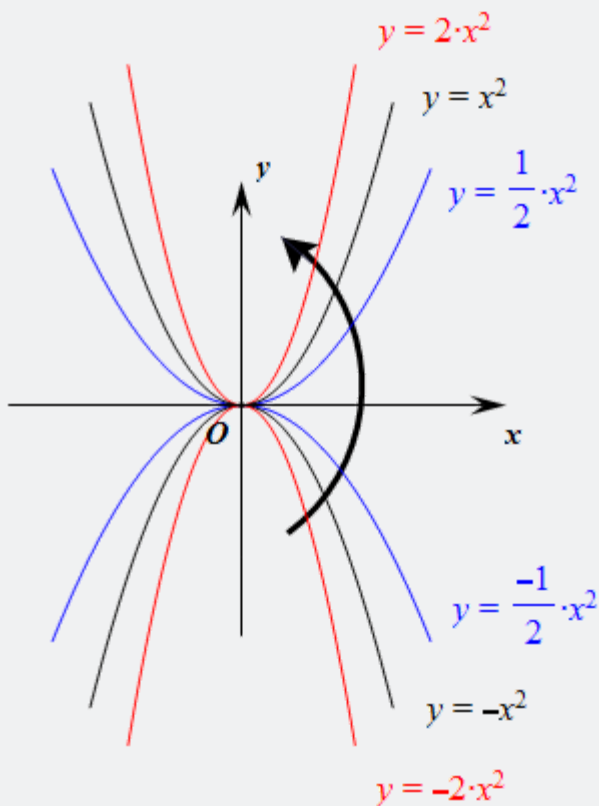
将上式与 $y = a(x + m)^2 + k$ 作比较，得

$$m = \frac{b}{2a}, k = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

$y = ax^2 + bx + c$		
a 的符号	$a > 0$	$a < 0$
开口方向	向上	向下
对称轴	$x = -\frac{b}{2a}$	
顶点坐标	$(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$	
函数最值	有最小值 $\frac{4ac - b^2}{4a}$	有最大值 $\frac{4ac - b^2}{4a}$
	当定义域为全体实数时，函数的最小值或最大值是顶点纵坐标的值	
增减性	当 $x < -\frac{b}{2a}$ 时， y 随 x 的增大而减小 当 $x > -\frac{b}{2a}$ 时， y 随 x 的增大而增大	当 $x < -\frac{b}{2a}$ 时， y 随 x 的增大而增大 当 $x > -\frac{b}{2a}$ 时， y 随 x 的增大而减小
$ a $ 决定开口大小	$ a $ 越大，开口越小； $ a $ 越小，开口越大。 在对称轴右侧，沿着逆时针方向， a 的值逐渐增大。	

$|a|$ 决定开口大小： $|a|$ 越大，开口越小； $|a|$ 越小，开口越大。

在对称轴右侧，沿着逆时针方向， a 的值逐渐增大。



💡 待定系数法求解析式（一般式）

一般式： $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$

如果已知二次函数的图象上的三点坐标（或称函数的三对对应值） (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) 、 (x_3, y_3) ，

那么方程组
$$\begin{cases} y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \\ y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c \\ y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c \end{cases}$$
 就可以唯一确定 a 、 b 、 c ，

从而求得函数解析式 $y = ax^2 + bx + c$ 。

①任何二次函数都可以整理成一般式 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的形式。

②已知任意3点坐标，可用一般式求解二次函数解析式。

💡 典题精炼1

8. 若点 $A(2, y_1)$ ， $B(-3, y_2)$ ， $C(-1, y_3)$ 三点在抛物线 $y = x^2 - 4x - m$ 的图象上，则 y_1 、 y_2 、 y_3 的大小关系是（ ）。

A. $y_1 > y_2 > y_3$

B. $y_2 > y_1 > y_3$

C. $y_2 > y_3 > y_1$

D. $y_3 > y_1 > y_2$

【答案】 C

【解析】 由抛物线 $y = x^2 - 4x - m$ 可知对称轴 $x = -\frac{b}{2a} = 2$ ，

∵ 抛物线开口向上，

而点 $A(2, y_1)$ 在对称轴上， $B(-3, y_2)$ 到对称轴的距离比 $C(-1, y_3)$ 远，

∴ $y_1 < y_3 < y_2$.

故选 C .

【标注】【知识点】二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的增减性

9. 已知二次函数 $y = ax^2 + 2ax + a + 1$ ，当 $x = 1$ 时， $y < 0$ ，且二次函数图象经过两点 $(-3, m)$ 、 $(2, n)$ ，则 m 、 n 的大小关系为 () .

A. $m = n$

B. $m > n$

C. $m < n$

D. 无法判断

【答案】 B

【解析】 由题可知对称轴为 $x = -1$ ，

当 $x = 1$ 时 $y = a + 2a + a + 1 = 4a + 1$ ，

∴ $4a + 1 < 0$

$4a < -1$

$a < -\frac{1}{4}$ ，

开口向下，

$(-3, m)$ 离对称轴更近，故值越大，

∴ $m > n$.

故选 B .

【标注】【知识点】二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的增减性

10. 已知二次函数 $y = x^2 + (b + 1)x + c$ ，若 $x \leq 2$ 时， y 随着 x 增大而减小，则实数 b 的取值范围是 _____ .

【答案】 $b \leq -5$

【解析】 二次函数 $y = x^2 + (b + 1)x + c$ 的对称轴为 $x = -\frac{b+1}{2}$.

∴ 当 $x \leq 2$ 时， y 随着 x 增大而减小，

∴ $-\frac{b+1}{2} \geq 2$ ，

解得 $b \leq -5$.

故答案为 $b \leq -5$.

【标注】【能力】运算能力

11. 对于二次函数 $y = -\frac{1}{4}x^2 + x - 4$ ，下列说法正确的是（ ）.

- A. 当 $x > 0$ 时， y 随 x 的增大而增大 B. 当 $x = 2$ 时， y 有最大值 -3
C. 图象的顶点坐标为 $(-2, -7)$ D. 图象与 x 轴有两个交点

【答案】B

【解析】 $\because$ 二次函数 $y = -\frac{1}{4}x^2 + x - 4$ 可化为 $y = -\frac{1}{4}(x - 2)^2 - 3$ ，
又 $\because a = -\frac{1}{4} < 0$ ，
 $\therefore$ 当 $x = 2$ 时，二次函数 $y = -\frac{1}{4}x^2 + x - 4$ 的最大值为 -3 .

【标注】【知识点】二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的增减性

 典题精炼2

12. 二次函数 $y = x^2 + bx + c$ 的图象经过点 $(2, 11)$ 和点 $(-1, -7)$ ，则它的解析式为 _____.

【答案】 $y = x^2 + 5x - 3$

【解析】 $\because$ 二次函数 $y = x^2 + bx + c$ 的图象经过点 $(2, 11)$ 和点 $(-1, -7)$ ，
 $\therefore \begin{cases} 4 + 2b + c = 11 \\ 1 - b + c = -7 \end{cases}$ ，
解得 $\begin{cases} b = 5 \\ c = -3 \end{cases}$ ，
 $\therefore$ 二次函数的解析式为： $y = x^2 + 5x - 3$.

【标注】【知识点】二次函数一般式

13. 已知二次函数的图象经过点 $(-1, -5)$ ， $(0, -4)$ 和 $(1, 1)$ ，则这二次函数的表达式为（ ）.

- A. $y = -6x^2 + 3x + 4$ B. $y = -2x^2 + 3x - 4$ C. $y = x^2 + 2x - 4$ D. $y = 2x^2 + 3x - 4$

【答案】D

【解析】设所求函数的解析式为 $y = ax^2 + bx + c$ ，
把 $(-1, -5)$ ， $(0, -4)$ ， $(1, 1)$ 分别代入，
得： $\begin{cases} a - b + c = -5 \\ c = -4 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$ ，

$$\text{解得} \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = -4 \end{cases} .$$

故所求的函数的解析式为 $y = 2x^2 + 3x - 4$.

故选D .

【标注】【知识点】二次函数一般式

14. 已知抛物线经过点(3, 14), (1, 4), (2, 7)三点, 求抛物线解析式 .

【答案】 $y = 2x^2 - 3x + 5$.

【解析】 设抛物线解析式为 $y = ax^2 + bx + c$,

$$\text{根据题意得} \begin{cases} 9a + 3b + c = 14 \\ a + b + c = 4 \\ 4a + 2b + c = 7 \end{cases} , \text{解得} \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = 5 \end{cases} ,$$

所以抛物线解析式为 $y = 2x^2 - 3x + 5$.

【标注】【知识点】二次函数一般式

2. 顶点式

$y = a(x - h)^2 + k$		
a 的符号	$a > 0$	$a < 0$
开口方向	向上	向下
对称轴	$x = h$	$x = h$
顶点坐标	(h, k)	(h, k)
函数最值	有最小值 k	有最大值 k
增减性	当 x ____ 时, y 随 x 的增大而____ 当 x ____ 时, y 随 x 的增大而____	当 x ____ 时, y 随 x 的增大而____ 当 x ____ 时, y 随 x 的增大而____

 教法备注

$y = a(x - h)^2 + k$		
a 的符号	$a > 0$	$a < 0$
开口方向	向上	向下
对称轴	$x = h$	$x = h$
顶点坐标	(h, k)	(h, k)
函数最值	有最小值 k	有最大值 k
增减性	当 $x < h$ 时, y 随 x 的增大而减小 当 $x > h$ 时, y 随 x 的增大而增大	当 $x < h$ 时, y 随 x 的增大而增大 当 $x > h$ 时, y 随 x 的增大而减小

🔔 待定系数法求解析式 (顶点式)

当已知**顶点坐标**或**对称轴**时, 可设**顶点式**求二次函数的解析式.

1. 已知顶点坐标 (h_0, k_0) 和图象上任意一点, 设顶点式 $y = a(x - h_0)^2 + k_0$, 再代入另一点坐标解关于 a 的方程即可;
2. 已知对称轴 $x = h_0$ 和图象上任意一点, 可由抛物线的对称性求得关于对称轴对称的点坐标, 该点必也在此抛物线上, 将这两点坐标代入顶点式 $y = a(x - h_0)^2 + k$, 解关于 a 、 k 的方程组即可.

🔔 典题精炼

15. 顶点为 $(5, 1)$, 形状与函数 $y = \frac{1}{3}x^2$ 的图象相同且开口方向相反的抛物线是 ().
- A. $y = -\frac{1}{3}(x - 5)^2 + 1$ B. $y = -\frac{1}{3}x^2 - 5$ C. $y = -\frac{1}{3}(x - 5)^2 - 1$ D. $y = \frac{1}{3}(x + 5)^2 - 1$

【答案】A

【解析】顶点为 $(5, 1)$, 形状与函数 $y = \frac{1}{3}x^2$ 的图象相同且开口方向相反的抛物线是
 $y = -\frac{1}{3}(x - 5)^2 + 1$.
 故选A.

【标注】【知识点】二次函数 $y = a(x - h)^2 + k$ 的图象和性质

16. 已知二次函数 $y = -x^2 + 2x - 3$, 用配方法化为 $y = a(x - h)^2 + k$ 的形式, 结果是 ().

A. $y = -(x-1)^2 - 2$ B. $y = -(x-1)^2 + 2$ C. $y = -(x-1)^2 + 4$ D. $y = -(x+1)^2 - 4$

【答案】A

【解析】 $y = -x^2 + 2x - 3 = -(x^2 - 2x + 1) + 1 - 3 = -(x-1)^2 - 2$.

【标注】【知识点】二次函数解析式间转化

17. 已知抛物线的顶点坐标为 $(-1, 4)$ ，且其图象与 x 轴交于点 $A(-2, 0)$ ，抛物线的解析式为_____.

【答案】 $y = -4(x+1)^2 + 4$.

【解析】设抛物线解析式为： $y = a(x+1)^2 + 4$,

将 $A(-2, 0)$ 带入，

解得： $a = -4$,

∴该抛物线的解析式为： $y = -4(x+1)^2 + 4$.

【标注】【知识点】二次函数顶点式

3. 交点式

待定系数法求解析式（交点式）

当已知**抛物线与 x 轴交点**时，可设**两根式**求二次函数的解析式.

1. 已知抛物线与 x 轴交点 $A(x_1, 0)$ ， $B(x_2, 0)$ 和图象上任意一点，设两根式 $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ ，再代入另一点坐标解关于 a 的方程即可；

2. 类似地，若已知抛物线与直线 $y = m$ 交点 $A(x_1, m)$ ， $B(x_2, m)$ 和图象上任意一点，设两根式 $y = a(x - x_1)(x - x_2) + m$ ，再代入另一点坐标解关于 a 的方程即可.

【注意】用对称式求解析式后一定要**化简成一般式或顶点式**

二次函数 $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ 的对称轴为 $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

典题精炼

18. 抛物线 $y = (x+1)(x-3)$ 的对称轴是直线().

A. $x = -1$

B. $x = 1$

C. $x = -3$

D. $x = 3$

【答案】B

【解析】 $y = (x+1)(x-3) = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$,

$\therefore$ 抛物线的对称轴是 $x = 1$.

【标注】【知识点】二次函数 $y = a(x-h)^2 + k$ 的图象和性质

19. 如果抛物线经过点 $A(2, 0)$ 和 $B(-1, 0)$, 且与 y 轴交于点 C , 若 $OC = 2$, 则这条抛物线的解析式是 ().

A. $y = x^2 - x - 2$

B. $y = -x^2 - x - 2$ 或 $y = x^2 + x + 2$

C. $y = -x^2 + x + 2$

D. $y = x^2 - x - 2$ 或 $y = -x^2 + x + 2$

【答案】D

【解析】设抛物线解析式为 $y = a(x-2)(x+1)$,

$\therefore OC = 2$,

$\therefore C$ 点坐标为 $(0, 2)$ 或 $(0, -2)$,

把 $C(0, 2)$ 代入 $y = a(x-2)(x+1)$ 得 $a \cdot (-2) \cdot 1 = 2$,

解得 $a = -1$,

此时抛物线解析式为 $y = -(x-2)(x+1)$,

即 $y = -x^2 + x + 2$;

把 $C(0, -2)$ 代入 $y = a(x-2)(x+1)$ 得 $a \cdot (-2) \cdot 1 = -2$,

解得 $a = 1$,

此时抛物线解析式为 $y = (x-2)(x+1)$,

即 $y = x^2 - x - 2$.

即抛物线解析式为 $y = -x^2 + x + 2$ 或 $y = x^2 - x - 2$.

故选 D.

【标注】【知识点】二次函数双根式 (交点式)

20. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过点 $(1, 4)$, 点 $(-1, 0)$ 和点 $(5, 0)$, 则该抛物线的解析式为 _____.

【答案】 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2}$

【解析】设抛物线的解析式为 $y = a(x+1)(x-5)$,

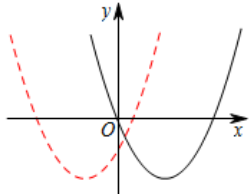
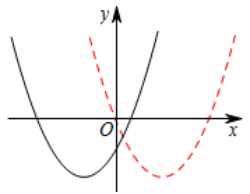
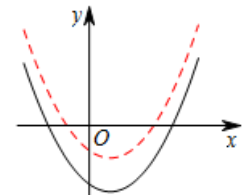
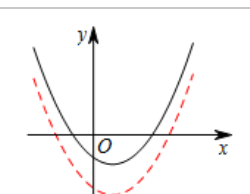
将 $(1, 4)$ 代入解析式, 得 $2 \times (-4)a = 4$,

$$\begin{aligned} \text{解得 } a &= -\frac{1}{2}, \\ \therefore y &= -\frac{1}{2}(x+1)(x-5), \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】二次函数双根式（交点式）

三、二次函数的几何变换

1. 平移

移动方向	图形	平移后解析式	简记
向左平移 m 个单位		$y = a(x - h + m)^2 + k$	“左加右减， 上加下减”； 左右平移在括号， 上下平移在末稍”
向右平移 m 个单位		$y = a(x - h - m)^2 + k$	
向上平移 m 个单位		$y = a(x - h)^2 + k + m$	
向下平移 m 个单位		$y = a(x - h)^2 + k - m$	

典题精炼

21. 将抛物线 $y = 2(x - 4)^2 - 1$ 先向左平移4个单位长度，再向上平移2个单位长度，平移后所得抛物线的解析式为（ ）.

- A. $y = 2x^2 + 1$ B. $y = 2x^2 - 3$ C. $y = 2(x - 8)^2 + 1$ D. $y = 2(x - 8)^2 - 3$

【答案】A

【解析】方法一：二次函数在平面直角坐标系中平移的规律为“上加下减，左加右减”，

$$\therefore y = 2(x - 4)^2 - 1 \xrightarrow{\text{左 } 4} y = 2(x - 4 + 4)^2 - 1 = 2x^2 - 1,$$

$$y = 2x^2 - 1 \xrightarrow{\text{上 } 2} y = 2x^2 - 1 + 2 = 2x^2 + 1,$$

$$\therefore \text{选A: } y = 2x^2 + 1.$$

故选A.

方法二：抛物线 $y = 2(x - 4)^2 - 1$ 先向左平移4个单位长度，得到的抛物线解析式为 $y = 2(x - 4 + 4)^2 - 1$ ，即 $y = 2x^2 - 1$ ，再向上平移2个单位长度得到的抛物线解析式为 $y = 2x^2 - 1 + 2$ ，即 $y = 2x^2 + 1$.

故选A.

【标注】【知识点】二次函数平移变换

22. 将抛物线 $y = x^2 - 4x - 4$ 向左平移3个单位，再向上平移5个单位，得到抛物线的表达式为（ ）.

A. $y = (x + 1)^2 - 13$ B. $y = (x - 5)^2 - 3$ C. $y = (x - 5)^2 - 13$ D. $y = (x + 1)^2 - 3$

【答案】D

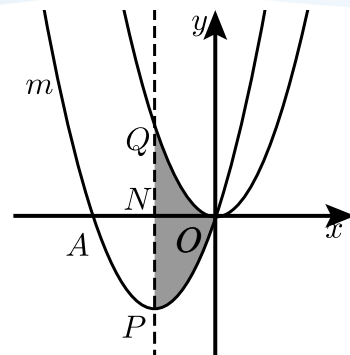
【解析】 $y = x^2 - 4x - 4 = (x - 2)^2 - 8$ ，故顶点坐标为 $(2, -8)$ ，

将抛物线 $y = x^2 - 4x - 4$ 向左平移3个单位，再向上平移5个单位，后所得抛物线顶点坐标为 $(-1, -3)$ ，

故平移后解析式为 $y = (x + 1)^2 - 3$.

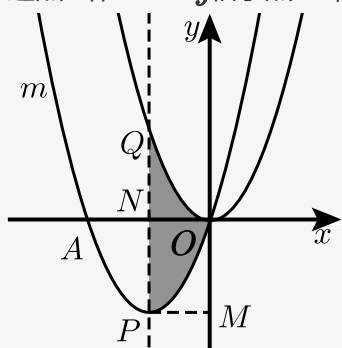
【标注】【知识点】二次函数平移变换

23. 如图，把抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 平移得到抛物线 m ，抛物线 m 经过点 $A(-6, 0)$ 和原点 $O(0, 0)$ ，它的顶点为 P ，它的对称轴与抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 交于点 Q ，则图中阴影部分的面积为 _____.



【答案】 $\frac{27}{2}$

【解析】 过点 P 作 $PM \perp y$ 轴于点 M ，



$\because$ 抛物线平移后经过原点 O 和点 $A(-6, 0)$ ，

$\therefore$ 平移后的抛物线对称轴为 $x = -3$ ，

得出二次函数解析式为： $y = \frac{1}{2}(x + 3)^2 + h$ ，

将 $(-6, 0)$ 代入得：

$$0 = \frac{1}{2}(-6 + 3)^2 + h,$$

$$\text{解得：} h = -\frac{9}{2},$$

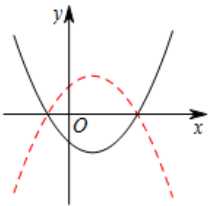
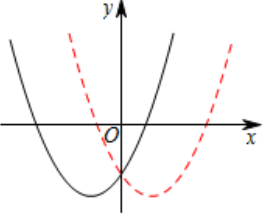
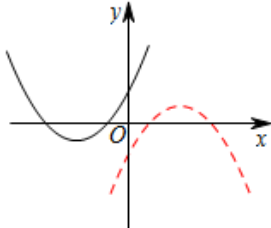
$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标是 } \left(-3, -\frac{9}{2}\right),$$

根据抛物线的对称性可知，阴影部分的面积等于矩形 $NPMO$ 的面积，

$$\therefore S = |-3| \times \left| -\frac{9}{2} \right| = \frac{27}{2}.$$

【标注】【知识点】二次函数与面积

2. 对称

对称	图形	对称后解析式	简记
关于 x 轴对称		$y = -ax^2 - bx - c$	关于谁对称谁 <u>不变</u> , 另外一个变 <u>相反</u> , 关于原点对称 <u>都改变</u>
关于 y 轴对称		$y = ax^2 - bx + c$	
关于原点中心对称		$y = -ax^2 + bx - c$	

先将一般式 $y = ax^2 + bx + c$ 化为顶点式 $y = a(x - h)^2 + k$.

对称	图形	对称后解析式
关于直线 $x = m$ 对称		$y = a(x - 2m + h)^2 + k$
关于直线 $y = n$ 对称		$y = -a(x - h)^2 + 2n - k$
关于顶点中心对称		$y = -a(x - h)^2 + k$
关于点 (m, n) 中心对称		$y = -a(x - 2m + h)^2 + 2n - k$

典题精炼

24. 二次函数 $y = x^2 - 2x + 2$ 的图象关于 x 轴对称的抛物线的解析式为() .

- A. $y = x^2 - 2x + 2$ B. $y = x^2 - 2x$ C. $y = -x^2 + 2x - 2$ D. $y = x^2 + 2x + 2$

【答案】 C

【解析】 关于 x 轴对称的两个函数解析式的开口方向改变，开口大小不变，二次项的系数互为相反数；对称轴不变，那么一次项的系数互为相反数；与 y 轴的交点互为相反数，那么常数项互为相反数 .

【标注】 【知识点】 二次函数图象关于坐标轴对称

25. 在平面直角坐标系中，先将抛物线 $y = x^2 + x - 2$ 关于 x 轴作轴对称变换，再将所得的抛物线关于 y 轴作轴对称变换，那么经两次变换后所得的新抛物线的解析式为（ ）.
- A. $y = -x^2 - x + 2$ B. $y = -x^2 + x - 2$ C. $y = -x^2 + x + 2$ D. $y = x^2 + x + 2$

【答案】 C

【解析】 先将抛物线 $y = x^2 + x - 2$ 关于 x 轴对称变换，可得新抛物线为 $y = -x^2 - x + 2$ ；再将所得的抛物线 $y = -x^2 - x + 2$ 关于 y 轴作轴对称变换，可得新抛物线为 $y = -x^2 + x + 2$.

故答案为： $y = -x^2 + x + 2$.

【标注】 【知识点】 二次函数图象关于坐标轴对称

26. 图象与二次函数 $y = x^2 - 2x + 3$ 的图象关于直线 $x = -1$ 对称的二次函数是（ ）.
- A. $y = x^2 - 2x + 3$ B. $y = x^2 + 6x + 11$ C. $y = x^2 - 2x + 11$ D. $y = x^2 + 6x - 3$

【答案】 B

【解析】 因为 $y = x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2$,

所以抛物线 $y = x^2 - 2x + 3$ 的顶点坐标为 $(1, 2)$

因为点 $(1, 2)$ 关于直线 $x = -1$ 对称的点的坐标为 $(-3, 2)$,

而抛物线 $y = x^2 - 2x + 3$ 关于直线 $x = -1$ 对称后图象的开口相同 ,

所以所求抛物线解析式为 $y = (x + 3)^2 + 2 = x^2 + 6x + 11$.

【标注】 【知识点】 二次函数关于平行坐标轴的直线对称

27. 如图，将抛物线 $l: y = 2x^2 - 4x + 3$ 沿直线 $y = -1$ 翻折得到抛物线 l' ，则抛物线 l' 的解析式为（ ）.
- A. $y = -2x^2 - 4x - 5$ B. $y = -2x^2 + 4x + 3$ C. $y = -\frac{1}{2}x^2 + x - 5$ D. $y = -2(x - 1)^2 - 3$

【答案】 D

【解析】 原抛物线的顶点为 $(1, 1)$ ，沿直线 $y = -1$ 翻折，那么新抛物线的顶点为 $(1, -3)$ ；

可设新抛物线的解析式为 $y = -2(x - h)^2 + k$ ，代入得： $y = -2(x - 1)^2 - 3$.

【标注】 【知识点】 二次函数关于平行坐标轴的直线对称

28. 二次函数 $y = x^2 + 3x + 2$ 的图象关于其顶点对称的图象的解析式是 _____ .

【答案】 $y = -x^2 - 3x - \frac{5}{2}$

【解析】 $y = x^2 + 3x + 2$ 关于顶点对称后, 得到的解析式是: $y = -x^2 - 3x + 2 - \frac{9}{2 \times 1}$
即 $y = -x^2 - 3x - \frac{5}{2}$.

【标注】【知识点】二次函数图象关于任意点对称

29. 二次函数 $y = x^2 + x + 1$ 的图象关于点 $A(2, 0)$ 对称的图象的解析式是 _____ .

【答案】 $y = -x^2 + 9x - 21$

【标注】【知识点】二次函数图象关于任意点对称

3. 旋转

典题精练

30. 把抛物线 $y = 2x^2 - 4x - 5$ 绕顶点旋转 180° , 得到的新抛物线的解析式是 () .

A. $y = -2x^2 - 4x - 5$ B. $y = -2x^2 + 4x + 5$ C. $y = -2x^2 + 4x - 9$ D. 以上都不对

【答案】 C

【解析】 方法一: $y = 2x^2 - 4x - 5 = 2(x - 1)^2 - 7$,

$\therefore$ 原抛物线的顶点为 $(1, -7)$,

点 $(0, -5)$ 在原抛物线上.

由题可得 $(0, -5)$ 绕顶点 $(1, -7)$ 旋转 180° 后得到点的坐标为 $(2, -9)$.

设新抛物线的解析式为 $y = a(x - 1)^2 - 7$,

把 $(2, -9)$ 代入新抛物线可得 $a = -2$,

$\therefore$ 新抛物线的解析式为 $y = -2(x - 1)^2 - 7 = -2x^2 + 4x - 9$, 故选C.

方法二: $y = 2x^2 - 4x - 5 = 2(x - 1)^2 - 7$,

$\therefore$ 原抛物线的顶点为 $(1, -7)$.

$\therefore$ 抛物线绕顶点旋转 180° ,

$\therefore$ 可得旋转后的抛物线的顶点坐标为 $(1, -7)$, 且 $a = -2$.

$\therefore$ 旋转后的抛物线的解析式为 $y = -2(x - 1)^2 - 7 = -2x^2 + 4x - 9$.

【标注】【知识点】二次函数图象关于原点对称

31. 将抛物线 $y = x^2 + 2x + 3$ 绕点 $(-1, 0)$ 旋转 180° ，得到的抛物线的解析式为（ ）.

A. $y = x^2 - 2x + 3$ B. $y = -x^2 + 2x - 3$ C. $y = -x^2 - 2x - 1$ D. $y = -x^2 - 2x - 3$

【答案】D

【解析】原函数 $y = x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2$ ，

顶点 $(-1, 2)$ ，绕点 $(-1, 0)$ 旋转 180° ，

旋转后顶点为 $(-1, -2)$ ，开口向下，

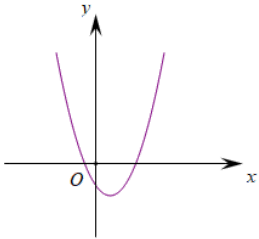
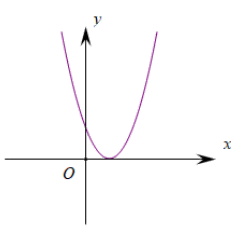
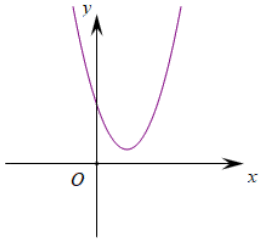
则新解析式为 $y = -(x + 1)^2 - 2 = -x^2 - 2x - 3$.

【标注】【知识点】二次函数图象关于任意点对称

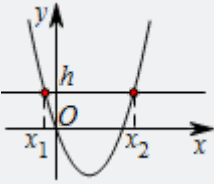
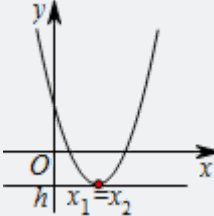
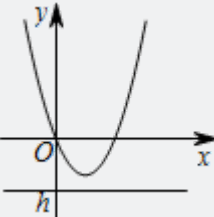
四、二次函数与方程、不等式

1. 二次函数与方程

方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的解可以看做函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴交点的横坐标，交点的个数决定方程解的个数.

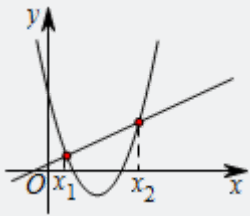
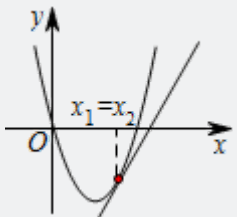
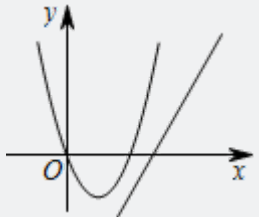
			
与x轴交点个数	2	1	没有
判别式	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
根的情况	有两个不等实根	有两个相等实根	没有实数根

求抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与直线 $y = h$ 的交点

$ax^2 + bx + c - h = 0$ 的判别式 Δ	图象 (以 $a > 0$ 为例)	与直线 $y = h$ 的交点情况	一元二次方程根的情况
$\Delta > 0$		有两个交点	有两个不相等的实数根
$\Delta = 0$		有一个交点	有两个相等的实数根
$\Delta < 0$		无交点	无实数根

求二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 与一次函数 $y = mx + n$ 的交点

由一元二次方程 $ax^2 + (b - m)x + (c - n) = 0$ 根的情况，确定二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与直线 $y = mx + n$ 位置关系

$ax^2 + (b-m)x + (c-n) = 0$ 的判别式 Δ	图象 (以 $a > 0$ 为例)	与直线 $y = mx + n$ 的交点情况	一元二次方程根的情况
$\Delta > 0$		有两个交点	有两个不相等的实数根
$\Delta = 0$		有一个交点	有两个相等的实数根
$\Delta < 0$		无交点	无实数根

典题精炼

32. 已知函数 $y = (k-3)x^2 + 2x + 1$ 的图象与 x 轴有交点, 则 k 的取值范围是().

- A. $k < 4$ B. $k \leq 4$ C. $k < 4$ 且 $k \neq 3$ D. $k \leq 4$ 且 $k \neq 3$

【答案】 B

【解析】 ①当 $k-3 \neq 0$ 时, $(k-3)x^2 + 2x + 1 = 0$,

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(k-3) \times 1 = -4k + 16 \geq 0,$$

解得 $k \leq 4$.

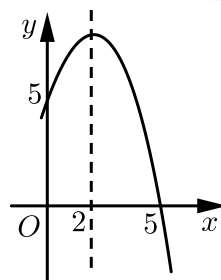
②当 $k-3 = 0$, 即 $k = 3$ 时, $y = 2x + 1$, 与 x 轴有一个交点,

故 k 的取值范围是 $k \leq 4$.

故答案为: $k \leq 4$.

【标注】 【知识点】 二次函数与坐标轴交点

33. 已知二次函数 $y = -x^2 + 4x + m$ 的部分图象如图所示, 则关于 x 的一元二次方程 $-x^2 + 4x + m = 0$ 的解是 _____.



【答案】 $x_1 = -1, x_2 = 5$

【解析】 根据图示知，二次函数 $y = -x^2 + 4x + m$ 的对称轴为 $x = 2$ ，与 x 轴的一个交点为 $(5, 0)$

根据抛物线的对称性知，抛物线与 x 轴的另一个交点横坐标与点 $(5, 0)$

关于对称轴对称，即 $x = -1$ ，

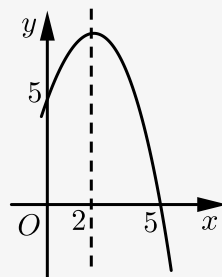
则另一个交点坐标为 $(-1, 0)$ ，

则当 $x = -1$ 或 $x = 5$ 时，函数值 $y = 0$ ，

即 $-x^2 + 4x + m = 0$ ，

故关于 x 的一元二次方程 $-x^2 + 4x + m = 0$ 的解为 $x_1 = -1, x_2 = 5$ ，

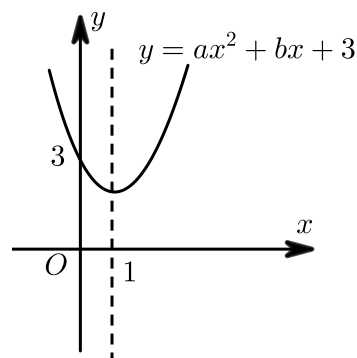
故答案是： $x_1 = -1, x_2 = 5$ 。



【标注】 【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

34. 如图，抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ ($a \neq 0$) 的对称轴为直线 $x = 1$ ，如果关于 x 的方程

$ax^2 + bx - 8 = 0$ ($a \neq 0$) 的一个根为 4，那么该方程的另一个根为 ()。



A. -4

B. -2

C. 1

D. 3

【答案】 B

【解析】 关于 x 的方程 $ax^2 + bx - 8 = 0$ ，有一个根为 4，

$\therefore$ 抛物线 $y = ax^2 + bx - 8$ 与 x 轴的一个交点为 $(4, 0)$ ，

$\therefore$ 抛物线 $y = ax^2 + bx - 8$ 与抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 的对称轴相同，都为 $x = 1$ ，

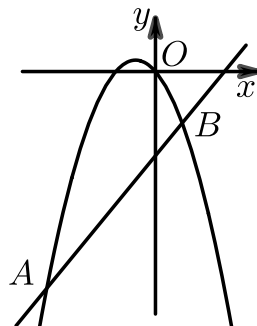
$\therefore$ 抛物线 $y = ax^2 + bx - 8$ 与 x 轴的另一个交点为 $(-2, 0)$,

$\therefore$ 方程的另一个根为 $x = -2$.

故选 B.

【标注】【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

35. 如图, 抛物线 $y = ax^2 + bx$ 与直线 $y = mx + n$ 相交于点 $A(-3, -6)$, $B(1, -2)$, 则关于 x 的方程 $ax^2 + bx = mx + n$ 的解为 _____.



【答案】 $x_1 = -3, x_2 = 1$

【解析】 $\therefore$ 抛物线 $y = ax^2 + bx$ 与直线 $y = mx + n$ 相交于点 $A(-3, -6)$, $B(1, -2)$,

$\therefore$ 关于 x 的方程 $ax^2 + bx = mx + n$ 的解为 $x_1 = -3, x_2 = 1$.

故答案为: $x_1 = -3, x_2 = 1$.

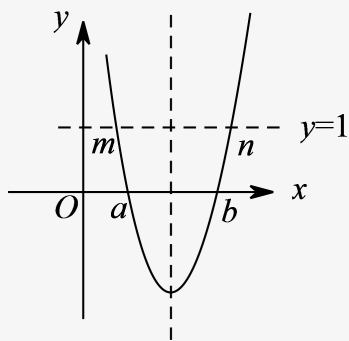
【标注】【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

36. 已知二次函数 $y = 1 - (x - a)(x - b)$, 其中 $a < b$, $m, n (m < n)$ 是方程 $1 - (x - a)(x - b) = 0$ 的两个根, 则实数 a, b, m, n 的大小关系是 ().

A. $a < m < n < b$ B. $m < a < b < n$ C. $a < m < b < n$ D. $m < a < n < b$

【答案】 B

【解析】 依题意, 画出函数 $y = (x - a)(x - b)$ 的图象.



函数图象为抛物线，开口向上，与 x 轴的两个交点的横坐标分别为 $a, b(a < b)$

方程 $1 - (x - a)(x - b) = 0$ 转化为 $(x - a)(x - b) = 1$,

方程的两根是抛物线 $y = (x - a)(x - b)$ 与 $y = 1$ 的两个交点.

由 $m < n$ ，可知对称轴左侧交点横坐标为 m ，右侧为 n .

由抛物线开口向上，且在对称轴左侧， y 随 x 增大而减少，则有 $m < a$

在对称轴右侧， y 随 x 增大而增大，则有 $b < n$.

综上， $m < a < b < n$.

【标注】【知识点】利用二次函数解不等式问题

37. 已知抛物线 $y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2}x + 6$ 与 x 轴交于点 A ，点 B ，与 y 轴交于点 C ，若 D 为 AB 的中点，则 CD 的长为（ ）.

A. $\frac{15}{4}$

B. $\frac{9}{2}$

C. $\frac{13}{2}$

D. $\frac{15}{2}$

【答案】 D

【解析】 $\because$ 抛物线 $y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2}x + 6$ 与 x 轴交于点 A ，点 B ，点 D 为 AB 的中点，

$\therefore$ 点 D 为抛物线的对称轴与 x 轴的交点，

$\therefore$ 抛物线的对称轴为 $x = -\frac{\frac{3}{2}}{2 \times (-\frac{1}{6})} = \frac{9}{2}$,

$\therefore D(\frac{9}{2}, 0)$.

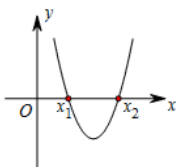
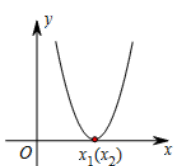
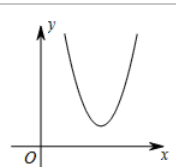
令 $x = 0$ ，得 $y = 6$ ，

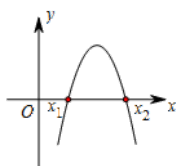
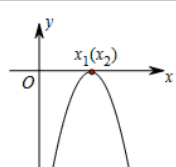
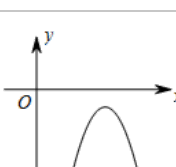
$\therefore C(0, 6)$.

$\therefore CD$ 的长为 $\sqrt{(\frac{9}{2})^2 + 6^2} = \frac{15}{2}$.

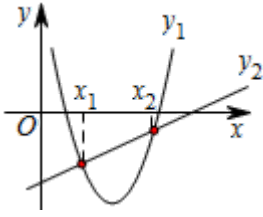
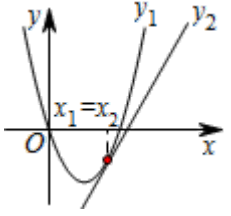
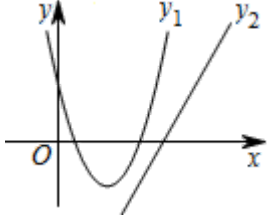
【标注】【知识点】二次函数与坐标轴交点

2. 二次函数与不等式

	图象	与x轴的交点情况	$ax^2 + bx + c > 0$ 的解集	$ax^2 + bx + c < 0$ 的解集
$a > 0$		有两个交点	$x < x_1$	$x_1 < x < x_2$
		有一个交点	$x \neq x_1$ (或 $x \neq x_2$)	无解
		无交点	全体实数	无解

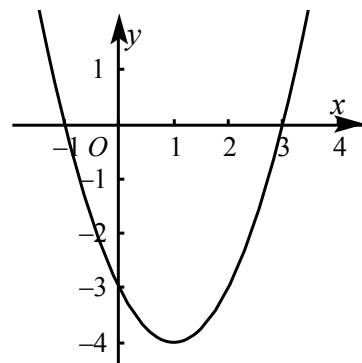
	图象	与x轴交点情况	$ax^2 + bx + c > 0$ 的解集	$ax^2 + bx + c < 0$ 的解集
$a < 0$		有两个交点	$x_1 < x < x_2$	$x < x_1$
		有一个交点	无解	$x \neq x_1$ (或 $x \neq x_2$)
		无交点	无解	全体实数

抛物线 $y_1 = ax^2 + bx + c$, 直线 $y_2 = mx + n (m > 0)$ 的不等关系

图象	两个函数的交点情况	$y_1 > y_2$ 的解集	$y_1 < y_2$ 的解集
	有两个交点	$x < x_1$ 或 $x > x_2$	$x_1 < x < x_2$
	有一个交点	$x \neq x_1$ (或 $x \neq x_2$)	无解
	无交点	全体实数	无解

典题精炼

38. 二次函数 $y = x^2 - 2x - 3$ 的图象如图所示，当 $y < 0$ 时，自变量 x 的取值范围是 () .



A. $-1 < x < 3$

B. $x < -1$

C. $x > 3$

D. $x < -1$ 或 $x > 3$

【答案】 A

【解析】 由二次函数 $y = x^2 - 2x - 3$ 的图象可知，

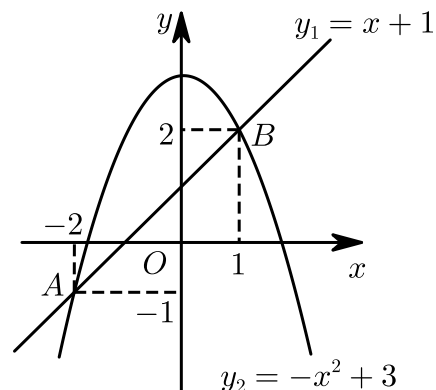
图象与 x 轴的交点坐标是 $(-1, 0)$ ， $(3, 0)$ ，

$\therefore$ 当 $y < 0$ 时，即图象在 x 轴下方的部分，此时 x 的取值范围是： $-1 < x < 3$ ，

故答案为： $-1 < x < 3$.

【标注】 【知识点】利用二次函数解不等式问题

39. 直线 $y_1 = x + 1$ 与抛物线 $y_2 = -x^2 + 3$ 的图象如图，当 $y_1 > y_2$ 时， x 的取值范围为（ ）.



A. $x < -2$

B. $x > 1$

C. $-2 < x < 1$

D. $x < -2$ 或 $x > 1$

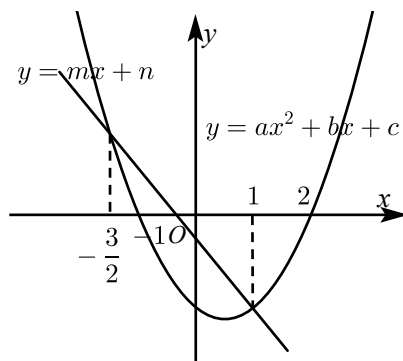
【答案】 D

【解析】 由图可知， $x < -2$ 或 $x > 1$ 时， $y_1 > y_2$.

故选D.

【标注】【知识点】二次函数与坐标轴交点

40. 直线 $y = mx + n$ 和抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 在同一坐标系中位置如图所示，那么不等式 $mx + n < ax^2 + bx + c < 0$ 的解集是 _____ .



【答案】 $1 < x < 2$

【解析】 $\because mx + n < ax^2 + bx + c < 0$,

$\therefore 1 < x < 2$.

【标注】【知识点】利用二次函数解不等式问题